Théorème de Frobenius

Lem : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note Π_u^x le polynôme unitaire engendrant $\{P \in \mathbb{K}(X),\ P(u)(x) = 0\}$.
Il existe $x \in E$, $\Pi_u^x = \Pi_u$.

* Si $\Pi_u = P^\alpha$, P irréductible, alors si pour tout $x \in E$, $\exists n < \alpha$, $P^n(u)(x) = 0$, alors $P^{\alpha-1}(u) = 0$, ce qui est absurde par minimalité de Π_u.

* Si $\Pi_u = \prod_{i=1}^{r} P_i^{\alpha_i}$, par lemme des noyaux, $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i^{\alpha_i}(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$.
Par ce qui précède, $\exists x_i \in E_i$, $\Pi_{u_{E_i}}^{x_i} = \Pi_{u_{E_i}}$. Posons $x = x_1 + \dots + x_r$.
$0 = \Pi_u^x(u)(x) = \sum_{i=1}^{r} \Pi_u^x(u)(x_i) \in \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ car les E_i sont stables par u : $\Pi_u^x(u)(x_i) = 0$.
Donc $\Pi_{u_{E_i}}^{x_i} = \Pi_{u_{E_i}}$ divise Π_u^x, donc $\Pi_u^x(u)$ est nul sur chaque E_i, donc sur E.
Ainsi, $\Pi_u^x = \Pi_u$.

Thm : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $F_1, \dots, F_r$ u-stables tels que :
$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$, $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ $u_i = u_{F_i}$ est cyclique et $\Pi_{u_{i+1}} \mid \Pi_{u_i}$.
La suite de polynômes (Π_{u_i}) ne dépend que de u.

· Soit $x \in E$ tq $\Pi_u^x = \Pi_u$. Soit $F = \{P(u)(x),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$. On a $F \simeq \mathbb{K}[X]/(\Pi_u^x)$ donc $\dim F = d = \deg \Pi_u$.
La famille $(e_i = u^i(x))_i$ forme une base de F, que l'on complète en $(e_0, \dots, e_{n-1})$ base de E.
Posons (e_i^*) base duale associée. $G = \{x \in E,\ \forall i \in \mathbb{N},\ e_{d-1}^* \circ u^i(x) = 0\}$.
$= \Gamma^\circ$ où $\Gamma = \{e_{d-1}^* \circ u^i,\ i \in \mathbb{N}\}$.

Fait : On a $E = F \oplus G$.

· Si $y \in F \cap G$, alors $y = \sum_{i=0}^{p} a_i e_i$ avec $p \leq d-1$, $a_p \neq 0$.
En composant par $e_{d-1}^* \circ u^{d-1-p}$, il vient $a_p = e_{d-1}^*(a_0 e_{d-1-p} + \dots + a_p e_{d-1}) = e_{d-1}^* \circ u^{d-1-p}(y) = 0$
C'est absurde, donc $y = 0$

· Soit $\varphi : \mathbb{K}[u] \to \mathrm{Vect}(\Gamma)$, bien définie et surjective.
$P(u) \mapsto e_{d-1}^* \circ P(u)$
Si $e_{d-1}^* \circ v = 0$, avec $v \neq 0$, on peut écrire $v = a_0 id + a_1 u + \dots + a_p u^p$ avec $p \leq d-1$ et $a_p \neq 0$. Or, $a_p = e_{d-1}^* \circ v(u^{d-1-p}(x)) = 0$, absurde, donc φ est injective.
Ainsi, $\dim(\mathrm{Vect}\,\Gamma) = \dim \mathbb{K}[u] = d$

Donc : $E = F \oplus G$.

F et G sont visiblement u-stables.
De plus, $\Pi_u = \Pi_u^x = \Pi_{u_F}$ par définition et $\Pi_{u_G} \mid \Pi_u = \Pi_{u_F}$
Si $F = E$, alors c'est terminé. Sinon, on raisonne par récurrence sur G, u-stable
en itérant

· Si $(F_1, \dots, F_r)$, $(G_1, \dots, G_s)$ conviennent, notons $P_i = \Pi_{u_{F_i}}$, $Q_j = \Pi_{u_{G_j}}$.
Par chaîne de divisibilité, $P_1 = \Pi_u = Q_1$. Considérons j premier indice tq $P_j \neq Q_j$.
Par décomposition de E, $P_j(u)(E) = P_j(u)(F_1) \oplus \dots \oplus P_j(u)(F_{j-1})$ car $P_j(u) = 0$ sur F_k, $k \geq j$
$= P_j(u)(G_1) \oplus \dots \oplus P_j(u)(G_s)$.
Or pour $1 \leq i \leq j-1$, $P_i = Q_i$, donc $\dim(P_j(u)(F_i)) = \mathrm{rg}(P_j(C(P_i))) = \mathrm{rg}(P_j(C(Q_i)))$
$= \dim(P_j(u)(G_i))$
Donc si $i \geq j$, $\dim(P_j(u)(G_i)) = 0$, donc $Q_i \mid P_j$, $Q_j \mid P_j$. Par symétrie, $Q_j = P_j$, absurde.